1100. 代數曲線ノ *Uniformisation* ニツイテ

有馬　喜八郎（阪大）

$f(x, y) = 0$ ヲ geschlecht p ナル代數曲線トス。

$p \geqq 2$ ナルトキ全平面デ有理型ナ函数 $x=g(t)$, $y=h(t)$ ニテ uniformisation スルコトハ出来ナイ。

コレハ Picard ノ定理デ，コノ系トシテ Picard ノ除外値定理ガ出テ来ルコト等ハヨク知ラレタコトデス。

以下コレニ関シテ述ベテミタイト思ヒマス。

得ラレタ結果ハ大部分ハ知ラレタモノデ，又証明法モ殆ンド既知ノ方法デス。

第一章ハ Ahlfors ノ Schwarz ノ Lemma ヲ利用シ[1]，第二章ニテ Nevanlinna 流ノ方法ヲ述ベタイト思ヒマス，又第一章ハ第二章ヘノ準備モ兼ネテイマス。

第　一　章

1. $f(x, y)=0$ ヲ geschlecht p. ナル代数曲線トシソノ Riemann 面ヲ R トス。

R 上ノ q 個ノ点 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots \alpha_q$ ニテ夫々 $(m_i, 1)$ $(i=1, 2, \cdots\cdots q)$ ナル對應ヲナス如ク單位円 $|z|<1$ ニ寫

---

(1) Ahlfors. An extension of Schwarz's Lemma (Trans. Amer. Math. Soc. 43. 1938)

R. M. Robinson: A generalization of Picard's and related theorems (Duke. Math. Journ. 5. 1939)

像スル $(p, q, m, \cdots\cdots m_q)$ ナル Automorphe function ヲ $z=\zeta(x, y)$ トス.

$$\bar{u} = \log \frac{\left|\frac{dz}{dx}\right|}{1-|z|^2}$$

トオケバ

$$\Delta_x \bar{u} = 4e^{2\bar{u}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

但シ Δ_x ハ x ニ関スル Laplacian

$x=g(t)$, $y=h(t)$ ヲ $|t|<R$ ニテ有理型函数トシ $z=\zeta(g(t), h(t))$ ニツイテ

$$u = \log \frac{\left|\frac{dz}{dx}\right|\left|\frac{dx}{dt}\right|}{1-|z|^2} = \log W$$

トスレバ, $u = \bar{u} + \log\left|\frac{dx}{dt}\right|$ ト (1) トヨリ

$$\Delta_t u = 4e^{2u} \cdots\cdots,$$

以後記述ヲ簡単ニスルタメ

$$\Delta u = 4e^{2u} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

トシマス。

② $f(x, y)=0$ ニ birational transformation ヲ施シ以下ニテハ R ノ無限遠点ハ分岐点ニアラズ, 又 ζ ノ分岐点ハ R ノ無限遠点又ハ分岐点ト一致セズト仮定シマス。

以下 $\bar{u}$ ノ性質ニツイテ各段ニ分ッテ考ヘマス.

(I) R 又ハ ζ ノ m 次ノ分岐点. $(x, y)=(a, b)$ ニ於テハ

$$\zeta = \alpha_0 + \alpha_1 \sqrt[m]{x-a} + \alpha_2 (\sqrt[m]{x-a})^2 + \cdots\cdots$$

トスレバ

$$\bar{u} = \frac{1-m}{m} \log|x-a| + U(x)$$

$U(x)$ ハ $x=a$ ノ近傍ニテ有界ナ函数ヲ表ハスモノトシマス。

以下ニテモ全様デス。

(II) $\zeta(x, y)$ ノ無限次ノ分岐点ニテハ

$$\bar{u} = -\log|x-a| - \log_2|x-a| + U(x)$$

(III) R ノ無限遠点ニテ

$$\zeta(x, y) = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \cdots\cdots$$

ヨリ

$$\bar{u} = -2\log|x| + U(x)$$

ソノ他ノ点ニテハ $\bar{u}$ ハ regular デス。

③ Ahlfors ノ Schwarz ノ Lemma ニツイテハ前註ノ論文ヲ参照シテ戴クコトニシテ簡単ニ記載シマス。

Riemann 面上ニ $|ds| = \lambda |dt|$ ナル Riemann metrique ヲ考ヘ $\log\lambda = v$ トス。

若シ $\Delta v \geqq 4e^{2v}$ ニシテ λ ガ $|t| < 1$ ニテ finite ナラバ

$$|ds| \leqq d\sigma$$

但シ $d\sigma = \dfrac{|dt|}{1-|t|^2}$

以下 ahlfors ノコノ定理ヲ利用シタニ三ノ結果ヲ出シテミタイト思ヒマス。（コレニツイテハ Robinson ノ論文ヲ参照サレタシ）

④ ②ノ(2)ヨリ u ハ

$$\Delta u = 4e^{2u}$$

$u = \log w$ トシ w ニツイテ考ヘル。

ζ ノ ∞ ノ ordnung ノ分岐点 (a, b) ハ $g(t) = a$, $h(t) = b$ トナラストキハ考ヘルヲ要シマセン。

R 又ハ ζ ノ m 次ノ分岐点ニツイテ考ヘマス。

先ヅ R ノ m 次ノ分岐点ニツイテ

$(x, y) = (a, b)$ ヲ分岐点トシマス。$x = a = g(t_0)$ トスレバ

$$x - a = g(t) - a = \alpha_0 (t - t_0)^{km}(1 + \bar{g}(t)) \cdots\cdots (3)$$

$\bar{g}(t)$ ハ $t = t_0$ ニテ正則且ツ $\bar{g}(t_0) = 0$ ナル函数トス。

$$w = e^{u} = e^{\bar{u}} \left|\frac{dx}{dt}\right|$$

ヨリ ② ノ (I) ノ $\bar{u}$ ト (3) ヲ用ヒテ

$$w = |t - t_0|^{k-1} S(t)$$

$S(t)$ ハ $t = t_0$ デ有界ナ函数ヲ表ス 以下同様。

故ニ w ハ $t = t_0$ ニテ $k \geqq 1$ ナル故 finite ニナル。

次ニ

ζ ノ m 次ノ分岐点ニテハ

$$g(t) - a = \alpha(t - t_0)^{m'} + \cdots\cdots$$

トスレバ

② ノ (II) ヲ用ヒテ

$$w = |t - t_0|^{\frac{m' - m}{m}} S(t)$$

故ニ $m' \geqq m$ ナラバ w ハ finite ニナル。

大ノ無限遠点ニテハ

$$g(t) = \frac{\alpha}{(t - t_0)^{m'}} + \cdots\cdots$$

トスレバ

$$w = |t - t_0|^{m' - 1} S(t)$$

故ニ $m' \geqq 1$ ナラバ w ハ finite ニナル。実際ニ $m' \geqq 1$ ナリ，故ニ上ノ結果ト Ahlfors ノ定理ヨリ次ノ結果ヲ得。

$x = g(t)$, $g = h(t)$ ガ R 上ノ点 α_i ヲ m_i 以上ノ order デトレバ

$$\frac{\left|\frac{dz}{dx}\right|\left|\frac{dx}{dt}\right|}{1 - |z|^2} |dt| \leqq \frac{|dt|}{1 - |t|^2} \cdots\cdots\cdots (4)$$

ガ成立ス。

但シ $m_i = \infty$ ノトキハ α_i ヲトラヌモノトス。

但シ $\zeta(x, y) = z$ ガ $(p, g, m_1 \cdots\cdots m_g)$ ナル Automorphe function ナルタメニハ

$$2p-2+\sum_{i=1}^{q}\left(1-\frac{1}{m_i}\right)>0 \cdots\cdots\cdots (5)$$

ガ必要ナリ。

上ノ結果デ

$|t|<R$ ナルトキハ

$$\frac{\left|\frac{dz}{dx}\right|\left|\frac{dx}{dt}\right|}{1-|z|^2} \leqq \frac{R}{R^2-|t|^2} \cdots\cdots (4)'$$

⑤ 上ノ結果ヨリ種々ノ結果ガ得ラレマス。

$x=g(t)$ ガ有理型函数（全平面ニ於テ）ナルトキハ

$$x=g(t), \quad y=g(t)$$

トシ

$$f(x,y)=x-y=0$$

ト考ヘレバ $p=0$ トオイテヨク知ラレタ Picard ノ定理ガ得ラレマース。然シコレ等ハ省略シテ二，三ノ結果ノミニ應用シテミマス。

定理 1. $f(x,y)=0$ ハ $p\geqq 2$ ナル代数曲線トスレバ $x=g(t)$, $y=h(t)$ ナル全平面デ有理型ナ函数ニテ Uniformisation デキナイ。

（証）必要ナラバ $f(x,y)=0$ ニ birational transformation ヲ施シテ今マデノ假設ニテ一般性ヲ失ハナイ. 今定理ガ成立シナイトスレバ $q=0$ トシ

$$\Sigma\left(1-\frac{1}{m_i}\right)=0 \qquad 2p-2\geqq 2>0$$

故ニ(4)ノ條件ガ成立ス。

故ニ④′ニ於テ任意ニtヲ固定シ$R\to\infty$トスレバ

$$\frac{\left|\frac{dz}{dx}\right|\left|\frac{dx}{dt}\right|}{1-|z|^2}=0$$

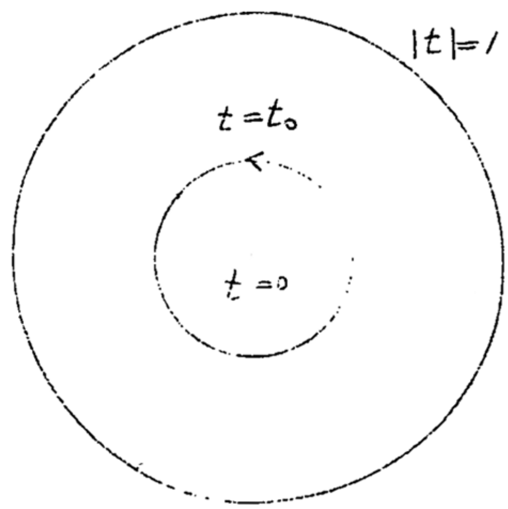
故ニxハ殆ンドスベテノtニツイテ

$$\frac{dx}{dt}=0$$

故ニxハ常数トナリ假設ニ反ス.

定理2. $f(x,y)=0$ハ$p\geqq 2$ナル代数曲線トス. $x=g(t)$, $y=h(t)$デ uniformisation デキルトスレバ $x=g(t)$ノ Singular point ハ isolated Singular point デハアリ得ナイ.

(証) $|t|<1$ ニテ $t=0$ ノミガ Singular point トス。



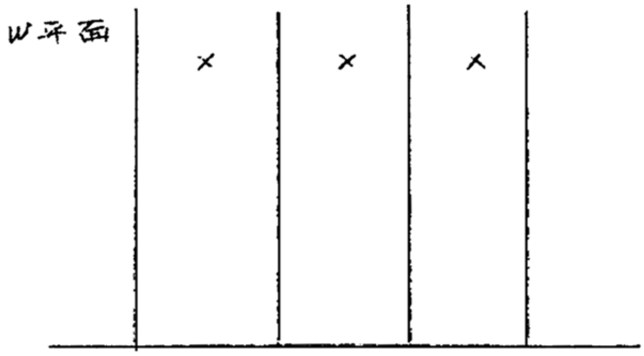
$w=-i\log t$ナル変換ヲ施スト$|t|<1$ハ$\mathfrak{I}(w)>0$ナル半平面ニ移ル.

$|t_0|=\rho<\varepsilon$ナル如ク(εハ任意ノ非常ニ小サイ数トス)t_0ヲトリ

t_0ヨリtヲ$|t|=\rho$ナル円周上ヲ正ノ方向ニ動カストwハ$\mathfrak{I}(w)=-\log\rho$ナル直線上動ク.

$q=0,\ p\geqq 2$ トスレバ (5) ガ成立ス。

t 平面ノ代リ w 平面ヲ考ヘル。且ツ半平面ノ非ユークリッド



element ヲ $\dfrac{|dt|}{R^2-|t|^2}$,

換リニ用ヒレバ $(4)'$ ハヤハリ成立ス。

$g(t_0)=a,\ h(t_0)=b$

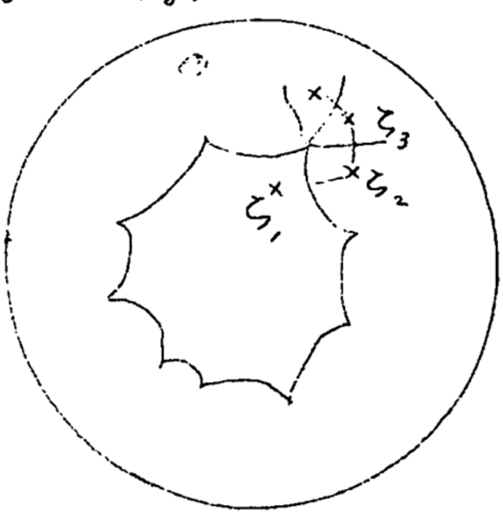
トス。

t ガ t_0 ヨリ $|t|=\rho$ ヲ動イテ t_0 ニ帰ルゴトニ $\zeta(x,y)$ ハ $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3 \cdots\cdots$ ト変ル。

$(4)'$ ヨリ

$$\int \frac{\left|\frac{dz}{dx}\right|\cdot\left|\frac{dx}{dt}\right|}{1-|z|^2}|dt| \leqq \int\frac{1}{\mathcal{J}(\overline{w})}\ |dw|$$

$z=\zeta(x,y)$



ヨリ $N\cdot E|\zeta_1-\zeta_2|$ ニテ ζ_1, ζ_2 ノ非ユークリッド的長サヲ表ヘスモノトスレバ $N\cdot E|\zeta_1-\zeta_2|= N\cdot E|\zeta_2-\zeta_3|=\cdots\cdots$

$$\leqq\int\frac{1}{-\log\rho}|dw|=-\frac{2\pi}{\log\rho}$$

ρ ガ充分小サイトキ上式ヨリ

$N\cdot E|\zeta_i-\zeta_{i+1}|$ ハ充分小サイ。

故ニ $|\zeta_i-\zeta_{i+1}|$ ハ充分小サイ。

故ニ $\zeta_1, \zeta_2, \cdots\cdots$ ハ楕円的，又ハ抛物線的固定点ノマワ

タノ知ルコトニナル。然シ $\zeta(x, y)$ ハ $(\rho, 0)$ ナル函数故カヽル固定点ヲ有セズ。

従ッテ $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3$ ----- トナルヨリ外ハナイ。

故ニ ρ ガ小ナルトキ $t - t_0$ ヨリ t ガ $|t| = \rho$ ヲ動クトキ $z = \zeta(x, y)$ ハ充分小サイ閉曲線ヲ画ク故ニ $\rho \to 0$ ナルトキ $\zeta(x, y)$ ハ或ル値ニ収斂シ，従ッテ $g(t)$, $h(t)$ ハ或ル値ニ収斂シ従ッテ Riemann ノ定理ニヨリ $g(t)$, $h(t)$ ハ $t = 0$ ヲ正則点又ハ極トシテ有スルコトニナリ假設ニ反ス。

（注意）定理2ノ証明ガ割合ニ簡単デスノデ或ハ独断的ナ点ガアルノデハナイカト恐レテ居マス。御教示ヲ願ヒマス。定理ソノモノハ正シイノデス。

$x = g(t)$, $y = h(t)$ ノ isolated singular point デナイコトハ分ッテイルノデスガ然ラバ如何ナル集合ニナルカ問題ハアルコトヽ思ヒマス。殆ンド手掛リヲ得マセンガ，他日発表出来タラト希望致シテ居ル次第デス。

辻先生ノ数物會ニ於ケル Rückerschnitts theorems ニ関スル limit point ノ集合ニ関スル定理ハソノ或ル方面ニ於ケル暗示ヲ與ヘルモノデハナイカト思ヒマス。

（續ク）